Equação de Maxwell

Maxwell's Equation

Opa! Não são quatro as Equações de Maxwell? Por que o título se refere a uma única equação? Na verdade, são vinte as equações originais de Maxwell no seu famoso Treatise on Electricity and Magnetism (1873). Equivalentes às vinte equações, o Tratado também traz oito equações escritas na forma dos quatérnios de Hamilton. A estrutura compacta das quatro equações, hoje universalmente conhecida como Equações de Maxwell, se deve a Heaviside, publicadas em 1885, portanto, seis anos após o falecimento de Maxwell, aos quarenta e oito anos de idade. A teoria eletromagnética deixada por Maxwell era desajeitada, de difícil compreensão, praticamente impenetrável. Foram necessários vinte anos de trabalho árduo e obsessivo por parte dos Maxwellianos (FitzGerald, Lodge, Heaviside e Hertz) para desvendar e sintetizar o legado de Maxwell. Para tanto, Heaviside (e Gibbs, independentemente) criou o cálculo vetorial a partir dos quatérnios de Hamilton. Com esse novo cálculo, as vinte equações de Maxwell (ou as oito equações quaterniônicas) foram condensadas em quatro equações vetoriais esteticamente simétricas, como num passo de mágica. A partir daí a eletrodinâmica de Maxwell junto com a mecânica de Newton tornaram-se os dois grandes pilares da física clássica.

Acontece que no início do século vinte, vários físicos e matemáticos (Poincaré, Lorentz, Einstein) verificaram que essas duas teorias eram fisicamente incompatíveis. Isso significava que se uma delas estivesse, de fato, correta, a outra, necessariamente, apresentava imperfeições. Nesta época, tanto a mecânica newtoniana como o eletromagnetismo se baseavam no conceito de espaço e tempo absolutos. Em 1905, Einstein a partir do eletromagnetismo de Maxwell desenvolveu a Teoria da Relatividade restrita, em que espaço e tempo deixam de ser entes separados e absolutos para se tornarem uma entidade única, conhecida como espaço-tempo. À luz da teoria da relatividade, Einstein verificou que o eletromagnetismo de Maxwell era uma teoria perfeita, irretocável, enquanto que a mecânica de Newton para ser universalmente verdadeira precisaria de alguns ajustes, chamados de correções relativistas.

Para se aprofundar na teoria eletromagnética neste cenário do espaço-tempo são imprescindíveis novas ferramentas matemáticas, visto que neste contexto, o cálculo vetorial torna-se inadequado e obsoleto. A primeira abordagem é o uso do cálculo tensorial (o mesmo cálculo usado por Einstein em sua teoria geral da relatividade). Neste caso, as quatro equações de Maxwell (na verdade, as suas vinte equações originais) se transformam em apenas duas equações tensoriais. O campo elétrico E e o campo magnético B deixam de ser grandezas vetoriais para tornarem-se componentes de dois tensores anti-simétricos de segunda espécie. O cálculo tensorial, embora versátil, possui pouco apelo geométrico. Geometria é fundamental no desdobramento da Física. Assim, a tendência, hoje, é reescrever as equações de Maxwell com uma nova ferramenta matemática, conhecida como Formas Diferenciais. Como no cálculo tensorial, nessa nova formulação as quatro equações vetoriais se reduzem a duas equações: $dF = 0$ e $d^*F = J$ em $R4$. O uso da linguagem das formas diferenciais na teoria eletromagnética é tão profícua que no seu livro Gravitation (1973); Misner, Thorne and Wheeler afirmam que "Forms illuminate eletromagnetism and electromagnetism illuminates forms". Mesmo assim, é possível explorar ainda mais o caráter geométrico do eletromagnetismo. É aí que entra em cena a Álgebra Geométrica de Clifford Cl3. Com essa nova linguagem matemática as quatro equações vetoriais (ou as vinte equações originais) de Maxwell se reduzem a uma única equação, ?F = e0-1J.

"Electromagnetic theory is beautiful!" escreveu Schwartz em seu livro: Principles of Electrodynamics (1972). E olha que Schwartz usou o cálculo tensorial. O que ele teria dito se tivesse usado a álgebra geométrica de Clifford? A beleza e elegância das leis físicas só são aparentes quando expressas em linguagem matemática apropriada. A álgebra de Clifford Cl3 é a linguagem perfeita para apreciar a beleza estonteante do eletromagnetismo.

A questão é: o que tudo isto tem haver com geofísica e engenharia? A tecnologia moderna exige cada vez mais conhecimentos aprofundados de física, e esses, por sua vez, se baseiam em ferramentas matemáticas atualizadas. No século XXI o velho cálculo vetorial de Gibbs e Heaviside será, sem dúvida, substituído pelas formas diferenciais, álgebras de Clifford ou outras ferramentas geométricas.

Equações Originais de Maxwell

As quatros famosas equações de Maxwell nos livros textos de Eletromagnetismo que todo aluno de Física (e de Geofísica) conhece não foram escritas por Maxwell. Na verdade, elas foram desenvolvidas por Heaviside dez anos após Maxwell propor sua teoria eletromagnética com base em vinte equações escritas na forma cartesiana. Em 1873 quando Maxwell publicou o sua famosa obra "A Treatise on Electricity & Magnetism" [1], não existia ainda o cálculo vetorial. Por isso, Maxwell escreveu as equações do eletromagnetismo na forma cartesiana, num total de vinte equações. No Tratado, Maxwell apresenta também, equivalentemente às vinte equações, oito equações na forma dos quatérnios de Halmilton [2]. A teoria eletromagnética deixada por Maxwell, embora profunda, era desajeitada, de difícil compreensão, praticamente impenetrável. Foram necessários vinte anos de trabalho árduo e obsessivo por parte dos Maxwellianos (FitzGerald, Lodge, Heaviside e Hertz) [3], para desvendar e sintetizar o legado de Maxwell. Depois de quebrar a cabeça durante vários anos, Heaviside (e Gibbs, independentemente [4]) criou o cálculo vetorial a partir dos quatérnios de Hamilton [5]. Com esse novo cálculo, as vinte equações de Maxwell (ou as oito equações quaterniônicas) foram sintetizadas em quatro equações vetoriais esteticamente simétricas como as que conhecemos hoje.
Eis as vinte equações na forma cartesiana e as oito equações na forma dos quatérnios, como Maxwell as apresentou originalmente em seu Tratado.

Forma cartesiana	**Forma dos quatérnios**	
$a = dH/dy - dG/dz$ $b = dF/dz - dH/dx$ $c = dG/dx - dF/dy$	$\mathfrak{B} = \mathbf{V}\nabla\mathfrak{A}$	(1)
$da/dx + db/dy + dc/dz = 0$	$\mathbf{S}\nabla\mathfrak{B} = 0$	(2)
$P = cdy/dt - bdz/dt - dF/dt - d\psi/dx$ $Q = adz/dt - cdx/dt - dG/dt - d\psi/dy$ $R = bdx/dt - ady/dt - dH/dt - d\psi/dz$	$\mathfrak{E} = \mathbf{V}\mathbf{u}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\psi$	(3)
$4\pi u = d\gamma/dy - d\beta/dz$ $4\pi v = d\alpha/dz - d\gamma/dx$ $4\pi w = d\beta/dx - d\alpha/dy$	$4\pi\mathfrak{C} = \mathbf{V}\nabla\mathfrak{H}$	(4)

$$f = K / 4\pi P$$
$$g = K / 4\pi Q$$
$$h = K / 4\pi R$$

$$\mathfrak{D} = K / 4\pi\mathfrak{E} \tag{5}$$

$$u = CP + \frac{K}{4\pi} dP / dt$$
$$v = CQ + \frac{K}{4\pi} dQ / dt$$
$$\omega = CR + \frac{K}{4\pi} dR / dt$$

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{K}{4\pi} d / dt \right)\mathfrak{E} \tag{6}$$

$$df / dx + dg / dy + dh / dz = \rho$$

$$\mathbf{S}\nabla\mathfrak{D} = \rho \tag{7}$$

$$a = \mu\alpha$$
$$b = \mu\beta$$
$$c = \mu\gamma$$

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} \tag{8}$$

Na equação (3), o ponto representa a derivada de $\mathfrak{A}$ em relação ao tempo.

Referências

[1] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity & Magnetism*; Dover Publications, Inc, New York, 1954.

[2] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*, 2 Vols., Chelsea Publishing Company, New York, 1969.

[3] B. J. Hunt, *The Maxwellians*; Cornell University Press, Ithaca, 1991.

[4] M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, Dover Publications, Inc, New York, 1967.

[5] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, 3 Vols.; Chelsea Publishing Company, New York, 1971.